

OSZTÁLYBA SOROLÁS, ÁTLAGOK ÁTLAGA

MINTAPÉLDA:

A táblázatban ezresekre kerekítve megadták egy város lakóinak életkor és nem szerinti megoszlását. A város legidősebb embere 93 éves.

Életkor	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–93
Nők (ezer fő)	7	9	10	10	12	11	10	12
Férfiak (ezer fő)	8	10	11	10	10	8	7	7

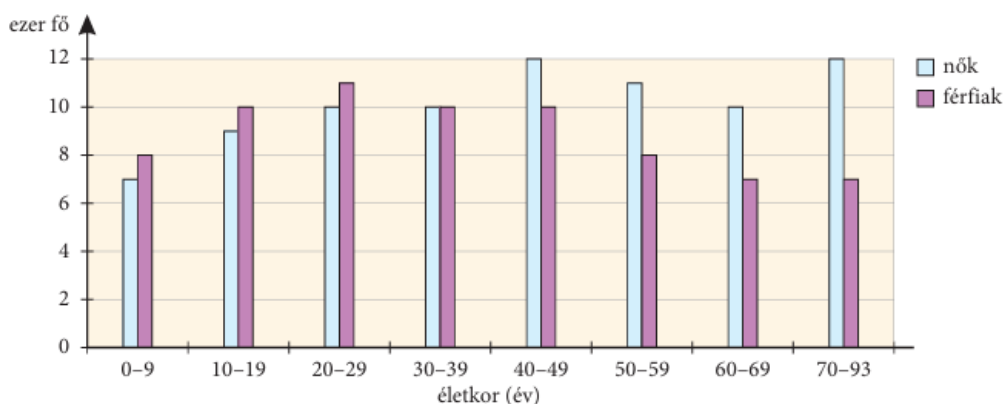
- Hány nő és hány férfi él ebben a városban?
- Készítsünk az adatok alapján oszlopdiagramot!
- Számítsuk ki a város lakosai életkorának átlagát!

A táblázat életkoruk szerint nyolc osztályba sorolta a város lakosait. Az első osztály határai a 0 és a 9, a második osztály határai a 10 és a 19, végül a nyolcadik osztály határai a 70 és a város legidősebb lakosának életkora, azaz 93.

(A hivatalos felmérésekben az ilyen típusú osztályba sorolás úgy történik, hogy például 9 éves az, akinek a felmérés évében van a tizedik születésnapja, 25 éves az, akinek a felmérés évében van a 26. születésnapja és így tovább.)

Megoldás

- A nők száma $7 + 9 + 10 + \dots + 12 = 81$ ezer, a férfiaké $8 + 10 + 11 + \dots + 7 = 71$ ezer. (Ezek természetesen kerekített értékek.)
- A diagram vízszintes tengelyén az osztályokat, függőleges tengelyén az adott osztályba tartozó lakosok számát tüntetjük fel.



- Az átlag kiszámításánál gyakran használt (közelítő) módszer az, hogy az egyes emberek valódi életkora helyett **osztályközepekkel** számolunk. Az **osztályközép az adott osztály két határának a számtani közepe**.

Az átlag kiszámításához tehát ezt a gyakorisági táblázatot használjuk:

Életkor	4,5	14,5	24,5	34,5	44,5	54,5	64,5	81,5
Lakosok száma (ezer fő)	15	19	21	20	22	19	17	19

Az életkorok súlyozott számtani közepe:

$$\frac{4,5 \cdot 15 + 14,5 \cdot 19 + 24,5 \cdot 21 + 34,5 \cdot 20 + 44,5 \cdot 22 + 54,5 \cdot 19 + 64,5 \cdot 17 + 81,5 \cdot 19}{15 + 19 + 21 + 20 + 22 + 19 + 17 + 19} = \frac{6207}{152} \approx 40,8 \text{ (év)}.$$

A város lakosai életkorának átlaga tehát körülbelül 41 év.

Megjegyzések

1. Feladatunkban egy város lakosságát osztályokba sorolták. Vegyük észre: **minden lakos benne van az egyik osztályban, de egyik lakos sincs benne két különböző osztályban!**
2. Az osztályba sorolt adatok átlagának kiszámítása természetesen nem feltétlenül adja ugyanazt, mintha minden egyes ember életkorát megkérdeztük volna, majd a 152 ezer szám összegét elosztottuk volna 152 ezerrel.
A statisztika olykor megelégszik a kevésbé pontos értékekkel is, főleg ha
 - a pontos értékek meghatározása túlságosan időigényes (például azért, mert a 152 ezer számot be kell gépelni a számítógépbe) vagy
 - túl sokba kerül, és nem „térül meg” a pontossággal nyert többletinformáció.

2. PÉLDA:

Bencének az egyik házi feladatában ki kellett számítani az 5, 7, 2, 3, 4 számok átlagát. Bence jó fejszámoló, ezért így „gyorsította meg” a megoldást:

Az 5 és a 7 átlaga 6 (mert $\frac{5+7}{2} = 6$), a 2, 3, 4 számok átlaga

pedig 3 (mert $\frac{2+3+4}{3} = 3$). Tehát az 5, 7, 2, 3, 4 számok

átlaga 4,5 (mert a 6 és a 3 átlaga $\frac{6+3}{2} = 4,5$).

Az iskolában meglepődve tapasztalta, hogy másoknak nem ugyanez „jött ki”. Jó-e Bence „gyors módszere”?

Megoldás

Bence gyors munkája sajnos hibás volt.

Ki kellett volna számolnia az $\frac{5+7+2+3+4}{5}$ tört értékét,

ami $\frac{21}{5} = 4,2$.

Ehelyett Bence ezt számolta ki: $\left(\frac{5+7}{2} + \frac{2+3+4}{3}\right) : 2$.

Ezt közös nevezőre hozás után így írhatjuk:

$$\frac{3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{12} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2} = 4,5,$$

és ez nem egyenlő az $\frac{5+7+2+3+4}{5}$ törttel.

Bence az öt szám átlaga helyett az öt számból képzett két csoport **átlagának átlagát** számította ki, így hibás eredményt kapott.

Akkor kapott volna helyes eredményt, ha az átlagok súlyozott átlagával számolt volna, tehát figyelembe vette volna, hogy 2 db szám átlaga volt 6, és 3 db szám átlaga volt 3:

$$\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5} = 4,2.$$

VÉLETLEN? – RELATÍV GYAKORISÁG

ELMÉLET

Ha egy kísérletet, megfigyelést n -szer végeztünk el, és k -szor kaptunk meg egy eredményt, akkor azt mondjuk, hogy ennek az eredménynek a **gyakorisága** k , a **relatív gyakorisága** pedig $\frac{k}{n}$.

(Itt az n pozitív egész szám, a k nemnegatív egész szám, és $k \leq n$.)

A relatív gyakoriság jobban jellemzi az eseményt, mint a gyakoriság, mert azt mutatja meg, hogy az esetek hányadrésztében kaptuk meg a vizsgált eredményt.

FELADATOK:

1. a) Minden pár dobjon fel 50-szer egy szabályos pénzdarabot! Számoljátok össze a fejek gyakoriságát, majd számítsátok ki a fejek relatív gyakoriságát!

Dobások száma	Fejek gyakorisága 50 dobásból	Fejek relatív gyakorisága 50 dobásból
50		

- b) A többi pár eredményét figyelembe véve készítsetek egy összesítő táblázatot 50, 100, 150, ... , 400 dobás esetén a fejek gyakoriságáról! Számítsátok ki az eredményekhez tartozó relatív gyakoriságokat!

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek gyakorisága	Fejek relatív gyakorisága
1.	50		
2.	100		
3.	150		

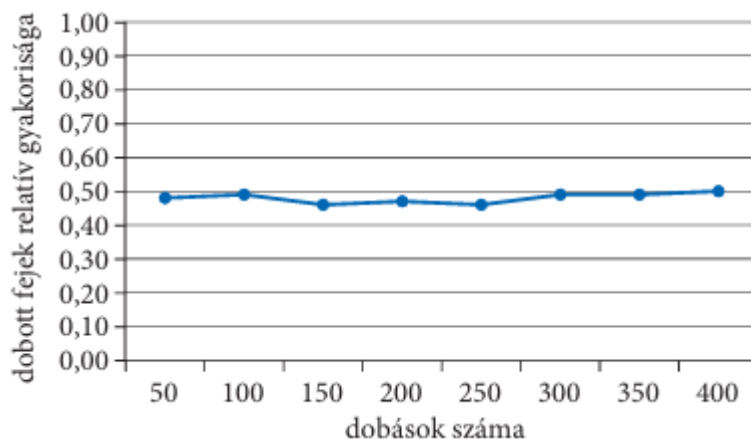
- c) Készítsetek diagramot arról, hogyan változott az összesítés során a dobott fejek számának relatív gyakorisága!
- e) Mit fejez ki az a hétköznapi kijelentés, hogy ha egy szabályos pénzérmét feldobunk, akkor 0,5 annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye fej lesz? Hogyan támasztja alá a kísérlet ezt a kijelentést?

Megoldás:

a) és b)

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek gyakorisága	Fejek relatív gyakorisága
1.	50	24	0,48
2.	100	49	0,49
3.	150	69	0,46
4.	200	93	0,47
5.	250	116	0,46
6.	300	148	0,49
7.	350	172	0,49
8.	400	201	0,50

c)



e)

1. Mit fejez ki a 0,5-ös érték?

A 0,5 (vagy 50%) az úgynevezett **elméleti valószínűség**. Ez egy modellszerű várakozás, ami két dologon alapul:

- **Kimenetek száma:** Összesen kétféle eredmény lehetséges (fej vagy írás).
- **Szimmetria:** Feltételezzük, hogy az érme „szabályos”, tehát nincs súlyozva egyik oldalra sem.

A klasszikus valószínűségi modell szerint:

$$P(\text{esemény}) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes lehetséges kimenetel száma}}$$

Ebben az esetben: $P(\text{fej}) = \frac{1}{2} = 0,5$.

2. Hogyan támasztja alá a kísérlet a kijelentést?

A kísérleti tapasztalat és az elmélet közötti hidat a **nagy számok törvénye** alkotja. Ha elkezded feldobni az érmét, a következőket fogod tapasztalni:

- **Rövid távon (pár dobás):** Az eredmény szinte bármi lehet. Dobhatsz egymás után 3 fejet is, ekkor a fej relatív gyakorisága 1,0 (100%), ami távol áll a 0,5-től.
- **Hosszú távon (sok ezer dobás):** Ahogy nő a kísérletek száma, a fej dobások aránya (a relatív gyakoriság) egyre közelebb fog kerülni a 0,5-höz. Ez a „kisimulási effektus” igazolja az elméleti várakozást.

Híres történelmi példák:

Több matematikus is végzett unalmas, de tanulságos kísérleteket ennek igazolására:

- **Georges-Louis Leclerc (Buffon):** 4040 dobásból 2048 lett fej (relatív gyakoriság: 0,5069).
- **Karl Pearson:** 24 000 dobásból 12 012 lett fej (relatív gyakoriság: 0,5005).

- 2**  **a)** Minden pár dobjon fel 50-szer 3 különböző pénzdarabot (pl. egy 5 forintos, egy 10 forintos és egy 20 forintos érmét), és minden dobás után húzzon egy vonást a megfelelő cellába! Az első betű az 5 forintoson, a második a 10 forintoson, a harmadik betű pedig a 20 forintoson látható képet jelzi, ez minden esetben fej (F) vagy írás (I) lehet.



FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III	Összesen

- b)** Készítsetek összesítő táblázatot az 50 dobás eredményéről:

A kísérlet kimenetele	FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III
Gyakoriság								
Relatív gyakoriság								

- c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három dobás közül legalább egy fej?

Megoldás:

a) és b)

A kísérlet kimenetele	FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III
Gyakoriság	6	7	5	8	6	7	6	5
Relatív gyakoriság	0,12	0,14	0,10	0,16	0,12	0,14	0,12	0,10

c)

A kedvező esetek: FFF, FFI, FIF, IFF, FII, IFI, IIF, ezek száma 7, így:

$$P(\text{legalább egy fej}) = \frac{7}{8}.$$

A kedvező elemi eseményeket könnyebben összeszámolhatjuk a következőképpen: összesen 8 eset van, ebből csak akkor **nem** következik be a „legalább egy fej” esemény, ha mindhárom érmevel írást dobunk, vagyis 1-szer. Így a kedvező esetek száma: $8 - 1 = 7$.

♦ ♦ ♦

A kedvező esetek összeszámlálása könnyebb volt, ha az esemény helyett annak komplementerét vizsgáltuk, ez több feladatnál hasznos lehet:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

MEGISMERHETŐ VÉLETLEN

ELMÉLET

Véletlen jelenség, véletlen kísérlet

A valószínűségszámítás véletlen jelenségekkel, helyzetekkel foglalkozik. Amikor egy ilyen véletlen jelenséget megfigyelünk (és feljegyezzük annak kimenetelét), akkor **véletlen kísérletet** végzünk.

Például:

Két dobókocka feldobása egy véletlen jelenség. Véletlen kísérletet végzek, amikor konkrétan feldobok egy fehér és egy fekete dobókockát, és megfigyelem a dobás eredményét. A kísérlet kimenetele, hogy mennyit dobtam a fehér, és mennyit dobtam a fekete kockával.

Elemi események

Egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.

Például:

Egy fehér és egy fekete dobókockával dobva egy elemi esemény, ha a fehér kockával 3-ast, a fekete kockával 4-est dobunk. Ebben a véletlen kísérletben 36 különböző elemi esemény következhet be.

Véletlen kísérletek és relatív gyakoriság

Azt tapasztaljuk, hogy ha a véletlen kísérletet nagyon sokszor, azonos körülmények között végezzük el, akkor egy konkrét kimenetel relatív gyakorisága egy jól meghatározott érték közelében ingadozik.

Például:

Ha egy pénzérmét nagyon sokszor feldobunk, akkor annak a relatív gyakorisága, hogy a dobás eredménye fej, várhatóan 0,5 közelében lesz.

Valószínűség

Ha egy véletlen esemény során az elemi események egyformán valószínűek (és a lehetséges elemi események száma véges), akkor az esemény **valószínűségét** úgy számolhatjuk, hogy a kedvező elemi események számát elosztjuk az összes elemi esemény számával.

A valószínűség jele P (a latin *probabilitas* szó kezdőbetűje, ami valószínűséget jelent).

Például:

- Két pénzérmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét érmén fej látható? Azt gondolhatnánk, hogy 3 kimenetel van: mindkét érmén fej, mindkét érmén írás, illetve egyiken fej és másikon írás, így a valószínűség $\frac{1}{3}$. De ezek nem egyformán valószínű elemi események! Az „egyik fej, másik írás” kimenetel kétféle módon valósulhat meg: lehet az első fej és a második írás, és lehet fordítva, az első írás és a második fej. Akkor írunk fel egyenlően valószínű elemi eseményeket, ha ezeket megkülönböztetjük. Egyenlően valószínű elemi események tehát: FF, FI, IF, II, ez összesen 4 lehetőség. Ebből 1 a kedvező, ezért a valószínűség $\frac{1}{4}$. Ha a kísérletet nagyon sokszor elvégezzük, akkor azt tapasztaljuk, hogy a relatív gyakoriság is 0,25 közelében lesz. Az előző két modell között az a különbség, hogy az egyikben a két pénzérmét egyformának gondoljuk, a másikban megkülönböztethetőnek. A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy megkülönböztethetők. Így a valóságot a második modell írja le.
- Két dobókockával dobva 3 olyan elemi esemény van, amikor a dobott számok összege 10 (fehér hatos és fekete négyes, fehér ötös és fekete ötös, fehér négyes és fekete hatos). Ezért annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 10, úgy számolható, hogy a kedvező elemi események számát (3) osztjuk az összes elemi esemény számával (36). A valószínűség:
$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ha az elemi események egyformán valószínűek



egy esemény valószínűsége = $\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$

FELADATOK:

1. PÉLDA:

Egy dobókockával dobunk, és vizsgáljuk a dobott számot. Mekkora annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a dobott szám 2-nél nagyobb?

Megoldás:

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, véges sok elemi esemény van, melyek a tapasztalat szerint egyformán valószínűek, így a klasszikus modell alkalmazható a valószínűség kiszámítására.

Az összes elemi események száma: $n = 6$, $A = \{3, 4, 5, 6\}$, így a kedvező elemi események száma: $k = 4$, tehát

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. PÉLDA:

Egy sárga és egy piros dobókockát feldobunk, és a dobott számokat összeadjuk. Mi a valószínűsége, hogy az összeg 7?

Megoldás

A két különböző kockával való dobás lehetséges eredményeit szemléltessük egy négyzettel, amelyet vízszintesen és függőlegesen is hat egyenlő részre osztunk. Az oszlopok jelentsék sorban azt, hogy a sárga kockával 1, 2, 3, 4, 5, 6-ost dobunk, az egymás alatti sorok pedig azt, hogy a piros kockával 1, 2, 3, 4, 5, 6-ost dobunk. Így a két kockával összesen 36-féle számpárt dobhatunk, az összes elemi események száma: 36.

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

a kis négyzetekbe beírtuk a dobott számok összegét, így látható, hogy az összeg 6-féleképpen lehet 7. Tehát annak a valószínűsége, hogy a két kockával dobott számok összege 7:

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$